



ELSEVIER

Journal of Geometry and Physics 16 (1995) 120–148

JOURNAL OF
GEOMETRY AND
PHYSICS

Structures symplectiques sur les espaces de courbes projectives et affines

L. Guieu, V. Yu. Ovsienko

Centre de Physique Théorique, CNRS, Luminy, case 907, F 13288 Marseille Cedex 9, France

e-mail: guieu@marcptsu3.univ-mrs.fr, ovsienko@marcptsu1.univ-mrs.fr

Reçu le 3 janvier 1994; révisé le 26 avril 1994

Résumé

Nous mettons en évidence l'existence d'une structure symplectique sur l'espace des courbes non paramétrées et non dégénérées d'une variété localement affine. Nous considérons également des espaces de courbes projectives munis d'une structure de Poisson. Cette construction relie l'algèbre de Virasoro et le crochet de Gel'fand–Dikii à la géométrie projective différentielle.

Abstract

A symplectic structure on the space of nondegenerate and nonparametrized curves in a locally affine manifold is defined. We also consider several interesting spaces of nondegenerate projective curves endowed with Poisson structures. This construction connects the Virasoro algebra and the Gel'fand–Dikii bracket with the projective differential geometry.

Keywords: Projective differential geometry; Spaces of curves; Virasoro algebra; Gel'fand–Dikii bracket;
1991 MSC: 54 B 20, 58 F 05, 17 B 68

1. Introduction

Il existe beaucoup de façons de construire des structures symplectiques sur les espaces de courbes dans des variétés.

La variété dont on considère l'espace de courbes doit être munie d'une certaine structure géométrique. De nombreux travaux ont été dédiés au cas des variétés riemanniennes (voir par exemple [Ig,Iv]) et symplectiques. Enfin, le cas des variétés de dimension 3 munies d'une forme volume a été considéré dans [Br].

Nous nous intéresserons, dans cet article, à l'espace des courbes non dégénérées¹ sur une variété localement projective. La question principale qui est à l'origine de ce travail est la suivante:

Existe-t-il une forme symplectique sur cet espace qui ne dépend que de la structure projective placée sur la variété?

Cette question nous amène naturellement à la théorie des algèbres de Lie de dimension infinie. Précisons ce fait par un premier exemple: la forme symplectique sur l'espace des structures projectives du cercle unité S^1 est reliée à la structure de Poisson canonique dont est doté le dual de l'algèbre de Virasoro. C'est la généralisation de cette structure – le crochet de Gel'fand–Dikii – qui prend le relais dans le cas d'une variété projective de dimension > 1 . Le lien existant entre la géométrie différentielle projective et les algèbres de Lie de dimension infinie constitue le sujet principal de notre article.

Les résultats nouveaux sont les suivants:

1.1 Nous présentons une définition purement géométrique de la forme symplectique sur l'espace de toutes les structures projectives sur S^1 à monodromie fixée (Chap. 2.8). Cette 2-forme coïncide avec la forme de Kirillov–Kostant–Souriau sur les orbites coadjointes dans le dual de l'algèbre de Virasoro Vir (voir [Ki]).

1.2 Soit Γ_T l'espace des courbes γ paramétrées et non dégénérées sur la sphère S^n à monodromie $T \in PGL(n+1; \mathbb{R})$ fixée (c'est-à-dire: $\gamma(x+2\pi) = T \cdot \gamma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$). Notons

$$\bar{\Gamma}_T = \frac{\Gamma_T}{PGL(n+1; \mathbb{R})}$$

le quotient de cet espace par la relation d'équivalence projective. Nous démontrons alors le:

Théorème. (i) $[KO, O]$ Les espaces $\bar{\Gamma}_T$ sont les feuilles symplectiques du crochet de Adler–Gel'fand–Dikii.

(ii) L'application moment

$$\mu : \bar{\Gamma}_T \rightarrow (\text{Vir})^*$$

pour l'action naturelle du groupe $\text{Diff}(S^1)$ des difféomorphismes du cercle, coïncide avec la courbure projective.

Corollaire. Il existe sur $\bar{\Gamma}_T$ une forme symplectique invariante sous l'action du groupe $\text{Diff}(S^1)$.

Nous présenterons dans le Chap. 7 la formule précise de la forme symplectique construite sur l'espace des courbes non oscillantes de $\mathbb{R}P^n$.

¹ C'est-à-dire qu'en chacun de ses points, son drapeau osculateur est non dégénéré.

Toutefois, nous nous attacherons plutôt à examiner le cas de l'espace des courbes *géométriques* (c'est-à-dire: non paramétrées), la structure symplectique induite par le crochet de Adler–Gel'fand–Dikii servant de fil d'Ariane. Cette forme symplectique sera calculée explicitement dans le cas, plus simple, des courbes dans le plan projectif.

1.3 Soit M une variété localement affine de dimension n . La notation $C_{\text{id}}(M)$ désignera l'espace des courbes fermées, non dégénérées et *non paramétrées* sur M et $\bar{C}_{\text{id}}(M)$ l'espace quotient de $C_{\text{id}}(M)$ par la relation d'équivalence affine des courbes. Nous avons alors le:

Théorème 1.1. $\bar{C}_{\text{id}}(M)$ est une variété symplectique dont chaque composante connexe est isomorphe à un certain espace $\bar{\Gamma}_T(S^{n-1})$.

Remarquons que cet isomorphisme permet de définir une action du groupe $\text{Diff}(S^1)$ sur l'espace des courbes non paramétrées !

1.4 En ce qui concerne le cas plus intéressant de l'espace des courbes sur une variété localement projective, une construction analogue au cas affine ne conduit pas à l'existence d'une structure symplectique mais à celle d'un crochet de Poisson. De plus, la définition de la non dégénérescence doit être renforcée: dans le cas de $\mathbb{R}P^2$, les courbes doivent être non dégénérées (au sens classique) mais doivent être également exemptes de points sextactiques²: ce sont ceux en lesquels la courbe entretient avec sa cône osculatrice un contact d'ordre ≥ 5 .

Ces courbes seront appelées *courbes de Cartan*.

Théorème 1.2. L'espace des courbes de Cartan non paramétrées et équivariantes³ est une variété de Poisson: il existe une immersion de cet espace dans l'espace des structures projectives sur S^1 .

1.5 En général, sur l'espace des courbes de $\mathbb{R}P^2$ non paramétrées, non dégénérées et à monodromie fixée (sans conditions sur l'éventuelle présence de points sextactiques), nous définissons un *feuilletage symplectique*: chaque feuille est munie d'une forme symplectique. Les courbes qui sont sur une même feuille possèdent le même nombre de points sextactiques.

Un problème d'ordre topologique qui nous semble intéressant se pose alors:

Problème. Classifier à homotopie près les courbes dans $\mathbb{R}P^2$ non dégénérées, à monodromie fixée et possédant k points sextactiques.

² Cette terminologie peut s'expliquer par cette remarque de Elie Cartan: "La cône osculatrice passant par un point sextactique a six points au moins en commun avec la courbe."

³ Ce sont celles dont chaque représentant paramétré admet un opérateur de monodromie

Par exemple, pour les courbes fermées: k est pair ≥ 6 (il s'agit d'un théorème classique de géométrie différentielle affine: le théorème des 6 sommets; voir [Bo,Bu] et le Chap. 2). Notons que la classification des courbes fermées et non dégénérées (sans conditions sur le nombre de points sextactiques) a été effectuée dans [Li1] (voir aussi Chap. 2).

Toutes les constructions de cet article font intervenir deux structures géométriques sur une courbe: sa longueur (affine ou projective) et sa courbure (affine ou projective).

2. Eléments de la géométrie différentielle des courbes projectives et affines

Nous rassemblons ici quelques résultats de la géométrie différentielle réelle des courbes dans l'espace projectif (ou affine).

La géométrie projective étudie les propriétés projectivement invariantes de ces objets. Le groupe $PGL(n; \mathbb{R})$ des "symétries projectives" ne laisse sur l'espace $\mathbb{R}P^{n-1}$ aucune structure invariante (riemannienne, symplectique, de contact ... etc) mise à part la structure projective. C'est la raison pour laquelle, les notions les plus élémentaires de la géométrie différentielle projective ne sont guère aisées à décrire.

Nous présentons dans ce chapitre des résultats classiques (qui, sans doutes, mériteraient d'être plus connus) sous une forme contemporaine et de manière élémentaire.

2.1. Structures projectives et affines sur une variété

Une structure projective sur une variété est une façon d'identifier (localement et en chacun de ses points) cette variété avec l'espace projectif.

Définition 2.1.

(i) Soit M une variété différentiable de dimension n . Un atlas projectif sur M est la donnée d'une famille de plongements $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ($\alpha \in I$) dont les domaines de définition forment un recouvrement ouvert de M et telle que les changements de cartes $g_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ soient des restrictions d'éléments du groupe projectif $PGL(n+1; \mathbb{R})$.

(ii) Deux atlas projectifs sont dits *équivalents* si leur réunion est encore un atlas projectif.

(iii) Une *structure projective* sur M est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas projectifs.

Exemple. Toute surface orientable admet des structures projectives.

Définition – Groupe de monodromie. Une structure projective σ sur M définit (modulo conjugaison) une immersion du revêtement universel de M dans l'espace projectif de dimension n :

$$\varphi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}P^n$$

ainsi qu'un homomorphisme du groupe fondamental de M dans le groupe projectif:

$$T : \pi_1(M) \rightarrow PGL(n+1; \mathbb{R}).$$

φ et T doivent satisfaire la relation d'équivariance suivante:

$$\varphi(a \cdot \xi) = T(a) \cdot \varphi(\xi) \quad \forall a \in \pi_1(M), \forall \xi \in \tilde{M}.$$

φ est appelée une *application développante* pour la structure σ et l'image de T est le *groupe de monodromie* associé à φ .

Le couple (φ, T) est défini modulo l'action du groupe projectif:

$$A \cdot (\varphi, T) = (A \cdot \varphi, A \cdot T \cdot A^{-1}) \quad A \in PGL(n+1; \mathbb{R}),$$

(φ, T) est une paire développante pour la structure σ .

Définition 2.2. Une structure projective sur une variété M est appelée une *structure affine* si tous les changements de cartes $g_{\alpha\beta}$ sont dans le groupe affine:

$$Aff(n; \mathbb{R}) \cong GL(n; \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^n \hookrightarrow PGL(n+1; \mathbb{R})$$

(à conjugaison près).

Les applications développantes d'une structure affine sont à valeurs dans \mathbb{R}^n :

$$\varphi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

2.2. Espace des courbes non dégénérées

M désigne ici une variété localement projective de dimension n , c'est-à-dire un couple formé par une variété et une structure projective sur cette dernière.

Définition 2.3. Une courbe fermée $\gamma : S^1 \rightarrow M$ est dite *non dégénérée* si, dans une carte projective, les vecteurs $\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(n)}$ sont linéairement indépendants.

Remarque. Le *drapeau* engendré par ces vecteurs est non dégénéré et indépendant du choix de la carte projective.

Notion d'équivalence projective – Définition.

(i) Deux courbes γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{R}P^n$ seront dites *projectivement équivalentes* si il existe $A \in PGL(n+1; \mathbb{R})$ tel que:

$$\gamma_2 = A \circ \gamma_1.$$

(ii) Soit M une variété localement projective de paire développante (φ, T) . Une *développée* d'une courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ est une courbe $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ de la forme $\varphi \circ \tilde{\gamma}$, où $\tilde{\gamma}$ désigne un relèvement de γ dans le revêtement universel de M .

(iii) Deux courbes γ_1 et γ_2 dans M seront dites *projectivement équivalentes* si elles possèdent deux développées qui le sont. Cette définition est indépendante du choix de ces développées.

Notons que cette définition s'étend sans problèmes au cas des courbes non paramétrées.

Equivalence affine. La notion d'équivalence des courbes dans une variété localement affine se définit de manière analogue: il suffit de remplacer $\mathbb{R}P^n$ par \mathbb{R}^n et $PGL(n+1; \mathbb{R})$ par $Aff(n; \mathbb{R})$.

Nous garderons la même notation pour les espaces de courbes modulo équivalence affine.

Cas des courbes à monodromie. Soit γ une courbe projective non dégénérée dans $\mathbb{R}P^n$ et T un élément de $PGL(n+1; \mathbb{R})$. Nous dirons que cette courbe est *T-équivariante* si:

$$\gamma(x + 2\pi) = T \cdot \gamma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Géométriquement, il est plus important d'étudier les courbes à équivalence projective près. La monodromie est alors bien définie si on la considère comme une classe de conjugaison dans $PGL(n+1; \mathbb{R})$. Pour le cas affine, les définitions sont analogues.

Notations. On notera:

- (i) $\mathcal{P}(M)$ l'espace de toutes les structures projectives sur une variété M .
 - (ii) $\mathcal{P}_T(M) \subset \mathcal{P}(M)$ l'espace des structures projectives sur M dont la monodromie est fixée et égale à T (T désigne ici un homomorphisme $T: \pi_1(M) \rightarrow PGL(n+1; \mathbb{R})$ défini à conjugaison près).
 - (iii) $\mathcal{C}(M)$ l'espace de toutes les courbes non dégénérées et non paramétrées sur une variété M munie d'une structure projective (ou affine).
 - (iv) $\mathcal{C}_0(M) \subset \mathcal{C}(M)$ l'espace des courbes équivariantes (la monodromie n'est pas fixée).
 - (v) $\mathcal{C}_T(M) \subset \mathcal{C}_0(M)$ l'espace des courbes équivariantes à monodromie fixée $= T$ (T désignant ici une classe de conjugaison dans $PGL(n+1; \mathbb{R})$).
 - (vi) $\bar{\mathcal{C}}(M), \bar{\mathcal{C}}_0(M)$ et $\bar{\mathcal{C}}_T(M)$ désignent les espaces quotients par la relation d'équivalence projective (ou affine) des espaces définis ci-dessus.
 - (vii) $\Gamma(M)$ l'espace des courbes non dégénérées et *paramétrées*.
- Les espaces $\Gamma_0(M), \Gamma_T(M), \bar{\Gamma}(M)$ etc. se définissent de la même façon.

2.3. Homotopie

Une question d'ordre topologique se pose immédiatement, à savoir: calculer les classes d'homotopie de courbes non-dégénérées sur une variété localement projective (ou localement affine). Il s'agit ici d'homotopie à travers les courbes *fermées* et *non dégénérées*. La question est donc de déterminer les composantes connexes de l'espace $\mathcal{C}_{id}(M)$. Nous présentons ici des résultats connus:

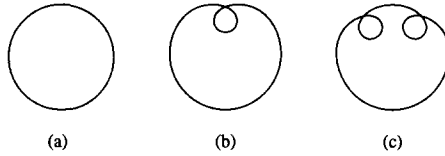


Fig. 1.

Composantes connexes de $C_{id}(\mathbb{R}^2)$. Ces classes d'homotopie sont repérées par un entier: le degré de l'application de Gauss (voir [Li1,Wh]) associée à chaque courbe. Il y en a donc une infinité dénombrable.

Le théorème de Little ([Li1]). *L'espace $C_{id}(\mathbb{R}P^2)$ possède trois composantes connexes: toute courbe fermée et non dégénérée sur $\mathbb{R}P^2$ est homotope à l'une des trois courbes dessinées dans la Fig. 1.*

Remarquons que, dans la classe des courbes lisses, les courbes (a) et (c) sont isomorphes.

L'espace $C_{id}(\mathbb{R}^4)$ possède encore trois composantes connexes chacune correspondant à l'une des courbes de la Fig. 1 via l'application de Gauss (voir [Li2]).

La classification des composantes connexes de l'espace $C_T(\mathbb{R}P^n)$ pour tout $T \in PGL(3; \mathbb{R})$ est donnée dans [K-S].

Les classes d'homotopie des courbes sur $\mathbb{R}P^n$ ont été calculées récemment dans [Sh] où il est démontré que l'espace $C_{id}(\mathbb{R}P^n)$ possède 3 composantes connexes pour n pair, et 2 pour n impair.

2.4. Courbes projectives et opérateurs différentiels linéaires

Notons \mathcal{L}^n l'espace des opérateurs différentiels linéaires L d'ordre $n \geq 2$ de la forme:

$$L = \partial^n + u_{n-2}(x)\partial^{n-2} + u_{n-3}(x)\partial^{n-3} + \dots + u_0(x) \quad (1)$$

où $\partial = d/dx$ et $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$.

Le fait suivant précise le rapport existant entre les opérateurs (1) et les courbes paramétrées non dégénérées sur $\mathbb{R}P^{n-1}$:

Lemme 2.4 (Wilczynski [Wi], Cartan [Ca]). *L'espace des courbes projectives paramétrées non dégénérées modulo équivalence projective est isomorphe à l'espace des opérateurs différentiels linéaires (1):*

$$\overline{T}(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathcal{L}^n. \quad (2)$$

Preuve.

(i) On associe à chaque opérateur de la forme (1) une classe de courbes projectivement équivalentes dans $\mathbb{R}P^{n-1}$ par la construction suivante:

Soit E l'espace vectoriel de dimension n des solutions de l'équation différentielle $Ly = 0$. A chaque $x \in \mathbb{R}$ correspond l'hyperplan $H_x \subset E$ constitué des solutions s'annulant en x :

$$H_x = \{y \in E \mid y(x) = 0\}.$$

L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto H_x \in P(E^*) \cong \mathbb{R}P^{n-1}$ fournit la courbe $\gamma(x)$ recherchée.

Les deux faits suivants sont alors évidents: la courbe γ est définie à homographie près (correspondant au choix d'une base de E) et elle est non dégénérée.

(ii) Réciproquement, soit $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}P^{n-1})$, il existe un unique opérateur $L_\gamma \in \mathcal{L}^n$ dont la classe de courbes associée par la construction précédente soit la classe d'équivalence $\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}(\mathbb{R}P^{n-1})$. La définition exacte de l'opérateur L_γ sera décrite dans la démonstration du Lemme 2.7 ci-après. \square

Remarques.

(a) *Monodromie*: Soit $\gamma \in \Gamma_T(\mathbb{R}P^{n-1})$ une courbe T -équivariante (où T est une classe de conjugaison dans $PGL(n; \mathbb{R})$). Les coefficients u_i dans l'opérateur L_γ sont alors 2π -périodiques et l'opérateur de monodromie \hat{T} associé à L_γ :

$$\hat{T}: E \rightarrow E: y \mapsto y \circ \tau_{2\pi} \quad (\tau_{2\pi}(x) = x + 2\pi)$$

est un élément de $SL(E)$. La donnée de \hat{T} est équivalente à celle d'une classe de conjugaison dans $SL(n; \mathbb{R})$; celle-ci se projette sur T :

$$SL(n; \mathbb{R}) \rightarrow PGL(n; \mathbb{R}) \quad \hat{T} \mapsto T.$$

(b) Tous les *invariants différentiels projectifs* des courbes $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}P^{n-1})$ s'expriment comme des polynômes différentiels en les fonctions u_i .

Exemples. Un opérateur de *Sturm–Liouville* :

$$L = \partial^2 + u(x)$$

dont le potentiel u est 2π -périodique est appelé un *opérateur de Hill*.

2.5. $\mathcal{P}(S^1)$ comme espace affine; dérivée de Schwarz

$\mathcal{P}(S^1)$ est un espace affine attaché à l'espace vectoriel \mathcal{L}^2 des opérateurs de Hill. C'est-à-dire que la donnée de deux structures α et $\beta \in \mathcal{P}(S^1)$ définit un opérateur de Hill L . On notera:

$$L = \alpha - \beta. \tag{3}$$

Cette construction appartient à Hubbard [Hu] (voir aussi [Gh, Iv]).

Définition – Dérivée de Schwarz. Soient φ et ψ deux immersions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une unique homographie $h_x \in PGL(2; \mathbb{R})$ telle que les jets d'ordre 2 en x des immersions φ et $h \circ \psi$ coïncident. La dérivée d'ordre 3:

$$(\varphi - h_x \circ \psi)'''(x)$$

définit alors une application cubique $T_x\mathbb{R} \rightarrow T_{\varphi(x)}\mathbb{R}P^1$ et sa composition avec $(T_x\varphi)^{-1} : T_{\varphi(x)}\mathbb{R}P^1 \rightarrow T_x\mathbb{R}$ est une application cubique $T_x\mathbb{R} \rightarrow T_x\mathbb{R}$. Cette dernière s'identifie à une forme quadratique sur $T_x\mathbb{R}$ qui sera notée $S(\varphi, \psi)(x)$. La différentielle quadratique $S(\varphi, \psi)$ est appelée *dérivée de Schwarz* (généralisée) de φ par rapport à ψ .

En particulier si $\psi(x) = x$ (modulo l'identification $\mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) on obtient la dérivée schwarziennne classique:

$$S(\varphi) = \left[\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)^2 \right] (dx)^2. \quad (4)$$

Les deux propriétés fondamentales de la dérivée de Schwarz sont:

- (j) $S(h \circ \varphi, \psi) = S(\varphi, h \circ \psi) = S(\varphi, \psi), \forall h \in PGL(2; \mathbb{R})$ (invariance projective),
- (jj) $S(\varphi, \psi) + S(\psi, \chi) = S(\varphi, \chi)$ ($\chi \in \text{Imm}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}P^1)$).

Considérons à présent φ et ψ comme étant deux applications développantes pour les deux structures projectives α et $\beta \in \mathcal{P}(S^1)$. La différentielle quadratique $S(\varphi, \psi)$ ne dépend que de la donnée de α et β (propriété (j)). Elle de plus est définie sur S^1 . On définit alors:

$$\alpha - \beta := S(\varphi, \psi).$$

L'opérateur de Hill (3) admet pour potentiel $u(x) = S(\varphi, \psi)(x)$ (par construction).

Les deux propriétés suivantes sont alors vérifiées:

- (a) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{P}(S^1)$, $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = \alpha - \gamma$ (relation de Chasles).
- (b) Pour toute structure $\alpha \in \mathcal{P}(S^1)$ et toute différentielle quadratique q sur S^1 , il existe une unique structure $\beta \in \mathcal{P}(S^1)$ telle que $q = \alpha - \beta$.

Ces deux dernières propriétés achèvent de démontrer le fait que $\mathcal{P}(S^1)$ est un espace affine attaché à \mathcal{L}^2 .

2.6. Action du groupe des difféomorphismes

Soit $\text{Diff}(\mathbb{R})$ le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de la droite réelle. Il agit sur l'espace des courbes paramétrées $\Gamma(M)$ d'une variété M par reparamétrisations. L'isomorphisme (2) permet de définir une action de $\text{Diff}(\mathbb{R})$ sur l'espace \mathcal{L}^n des opérateurs d'ordre n .

Lemme 2.5. (i) *Le potentiel de degré $n - 2$ dans un opérateur $L \in \mathcal{L}^n$ se transforme sous l'action d'un difféomorphisme $g \in \text{Diff}(\mathbb{R})$ de la façon suivante:*

$$g^* u_{n-2} = (u_{n-2} \circ g) \cdot g'^2 + \frac{1}{12} n(n-1)(n+1) S(g).$$

(ii) *L'expression:*

$$w_3 = u_{n-3} - \frac{1}{2}(n-2) \times u'_{n-2}$$

se transforme comme une différentielle cubique:

$$g^* w_3 = (w_3 \circ g) \times g'^3.$$

Preuve. Il s'agit ici d'un calcul direct. □

Les autres coefficients u_i se transforment, sous l'action de $\text{Diff}(\mathbb{R})$, suivant des formules plus compliquées. Cependant, nous avons tout de même le fait classique suivant:

Proposition 2.6. *Il existe une série de polynômes différentiels en u_i :*

$$w_k = w_k(u_i, u'_i, \dots), \quad k \in \{3, 4, \dots, n\},$$

qui se transforment pour l'action de $\text{Diff}(\mathbb{R})$ comme des différentielles de degré k :

$$w_k = w_k(x) (dx)^k.$$

Les expressions (non explicites) pour les w_k ont été déterminées pour la première fois dans des travaux de Physique Théorique (voir [F-I-Z]).

Remarque. Les différentielles w_k ne sont pas uniquement définies pour $k > 3$.

Il est également possible d'interpréter géométriquement les solutions de l'équation différentielle linéaire $Ly = 0$ comme le montre le lemme suivant.

Lemme 2.7. *Sous l'action du groupe $\text{Diff}(\mathbb{R})$, les solutions de l'équation différentielle $Ly = 0$ se transforment comme des densités tensorielles de poids $(1 - n)/2$:*

$$y = y(x) (dx)^{(1-n)/2}.$$

Preuve. (i) Rappelons que l'action de $\text{Diff}(\mathbb{R})$ sur \mathcal{L}^n est donnée par son action sur les courbes $\gamma \subset \mathbb{R}P^{n-1}$. Nous allons à présent expliciter les formules donnant les solutions de l'équation différentielle $L_\gamma y = 0$.

Soit $(\gamma_1(x), \dots, \gamma_{n-1}(x))$ un système de coordonnées locales affines pour la courbe γ . Notons \bar{w}_γ la fonction définie par:

$$\bar{w}_\gamma(x) = \begin{vmatrix} \gamma'_1 & \dots & \gamma'_{n-1} \\ \gamma_1^{(n-1)} & \dots & \gamma_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Les n fonctions:

$$y_0 = \bar{w}_\gamma^{-1/n}, \quad y_1 = \gamma_1 \bar{w}_\gamma^{-1/n}, \quad \dots, \quad y_{n-1} = \gamma_{n-1} \bar{w}_\gamma^{-1/n}, \quad (5)$$

constituent alors un système fondamental de solution pour l'équation

$$L_\gamma y = 0.$$

(ii) La formule (5) montre immédiatement que les solutions y_i se transforment sous l'action des reparamétrisations $g^* \gamma = \gamma \circ g$ de la façon suivante:

$$g^* y = (y \circ g) \times (g')^{(1-n)/2} \quad \square$$

Exemples.

($n = 2$) Les solutions d'une équation de Sturm–Liouville se transforment comme des densités tensorielles de poids $-1/2$ sur \mathbb{R} .

($n = 3$) Les solutions de l'équation différentielle $y''' + u_1(x)y' + u_0(x)y = 0$ se transforment comme des champs de vecteurs sur \mathbb{R} .

Monodromie. Soit $\gamma \in \Gamma_T(\mathbb{R}P^{n-1})$ une courbe T-équivariante. L'action d'un difféomorphisme $g \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$ préserve la monodromie si et seulement si:

$$g(x + 2\pi) = g(x) + 2\pi, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ces difféomorphismes constituent un sous-groupe de $\text{Diff}^+(\mathbb{R})$ isomorphe au revêtement universel, noté $\widetilde{\text{Diff}}^+(S^1)$, du groupe $\text{Diff}^+(S^1)$ des difféomorphismes du cercle respectant l'orientation. Par conséquent, l'action de $\widetilde{\text{Diff}}^+(S^1)$ sur les courbes équivariantes se projette en une action de $\text{Diff}^+(S^1)$ sur l'espace $\mathcal{L}_{2\pi}^n$ des opérateurs différentiels à coefficients périodiques.

Il est à remarquer que – en ce qui concerne l'action des difféomorphismes sur les solutions – c'est toujours $\widetilde{\text{Diff}}^+(S^1)$ qui agit et non $\text{Diff}^+(S^1)$.

Exemple: l'espace $\overline{T}_0(\mathbb{R}P^2)$. Considérons l'espace $\overline{T}_0(\mathbb{R}P^2)$ de toutes les courbes paramétrées, non dégénérées et équivariantes modulo équivalence projective. Notons $\mathcal{F}_3(S^1)$ l'espace des différentielles cubiques sur S^1 et $q: \mathcal{P}(S^1) \rightarrow \mathcal{P}(S^1) \times \mathcal{F}_3(S^1)$ le plongement: $q(\alpha) = (\alpha, 0)$.

Il existe alors un isomorphisme $\Phi: \overline{T}_0(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \mathcal{P}(S^1) \times \mathcal{F}_3(S^1)$ rendant cohérent le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{2\pi}^3 \cong \overline{T}_0(\mathbb{R}P^2) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{P}(S^1) \times \mathcal{F}_3(S^1) \\ \mu \searrow & & \nearrow q \\ & & \mathcal{P}(S^1) \cong \mathcal{L}_{2\pi}^2 \end{array}$$

où μ désigne l'application $\text{Diff}^+(S^1)$ -équivariante:

$$\partial^3 + u_1 \partial + u_0 \xrightarrow{\mu} \partial^2 + \frac{1}{4} u_1.$$

La construction de l'application Φ est la suivante: Soit $L = \partial^3 + u_1 \partial + u_0$. Alors,

$$\Phi(L) = (\mu(L) ; w_3) = \left(\partial^2 + \frac{1}{4} u_1 ; \left(u_0 - \frac{1}{2} u_1' (dx)^3 \right) \right).$$

Remarquons que $(\Phi^{-1} \circ q)(\partial^2 + u) = \partial^3 + 4u\partial + u'$ et que la courbe $\bar{\gamma} \in \overline{T}_0(\mathbb{R}P^2)$ associée à cet opérateur a son support dans une cône de $\mathbb{R}P^2$ (voir [Ca]).

2.7. Longueurs d'arc affine et projective; courbures affine et projective

Longueur d'arc affine. Soit $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ une courbe non paramétrée et non dégénérée. Fixons un paramètre x quelconque sur c .

Définition. On appelle *longueur d'arc affine* sur c la 1-forme

$$d\sigma = C^{\text{te}} [\overline{W}_c(x)]^{2/n(n+1)} dx$$

où $\overline{W}_c(x) = \det(c'(x), c''(x), \dots, c^{(n)}(x))$.

Le paramètre σ est défini à une transformation affine près: $\sigma \sim a\sigma + b$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$). σ est appelé le *paramètre affine* sur c .

Il est à noter que la définition du paramètre affine fait intervenir le volume euclidien du parallélépipède supporté par les n vecteurs $c'(x), \dots, c^{(n)}(x)$.

Courbure affine – Définition. Les $n - 1$ fonctions:

$$\kappa_i(\sigma) = (-1)^i \det(c', \dots, \hat{c}_i, \dots, c^{(n+1)})(\sigma)$$

(où $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ et le symbole $\hat{}$ signifie l'ommission du vecteur correspondant) sur la courbe c sont appelées les *courbures affines* d'ordre i de c .

Exemple. Nous retrouvons dans le cas où $n = 2$ les définitions classiques de la longueur d'arc et de la courbure affine d'une courbe de \mathbb{R}^2 :

$$d\sigma = \left| \begin{array}{cc} c'_1(x) & c'_2(x) \\ c''_1(x) & c''_2(x) \end{array} \right|^{1/3} dx \quad \text{et} \quad \kappa(\sigma) = \left| \begin{array}{cc} c''_1(\sigma) & c''_2(\sigma) \\ c'''_1(\sigma) & c'''_2(\sigma) \end{array} \right|$$

si $c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$ (voir [Bo] et [Bu]).

On peut en fait réaliser les courbures κ_i comme les coefficients d'un opérateur différentiel linéaire de degré $n + 1$. Plus précisément, les coordonnées de la courbe c paramétrée par σ vérifient l'équation différentielle:

$$y^{(n+1)} + \kappa_1(\sigma)y^{(n-1)} + \dots + \kappa_{n-1}(\sigma)y' = 0.$$

Application de Gauss. Il est possible d'associer naturellement à chaque courbe affine $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ une courbe projective paramétrée $\tau(c) \in \overline{T}(\mathbb{R}P^{n-1})$ modulo équivalence projective.

Précisons cette construction. Munissons la courbe c du paramètre affine σ . La vitesse $\dot{c} = dc/d\sigma$:

$$\dot{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}.$$

$\tau(c)$ est alors la classe de \dot{c} modulo $PGL(n; \mathbb{R})$.

Lemme 2.8. *L'opérateur différentiel linéaire associé à $\tau(c) \in \overline{T}(\mathbb{R}P^{n-1})$ est:*

$$L_c = \partial_\sigma^n + K_1(\sigma)\partial_\sigma^{n-2} + \dots + K_{n-1}(\sigma) \quad (\partial_\sigma = d/d\sigma).$$

Preuve. D'après (6) les coordonnées y_i de $c'(\sigma)$ vérifient l'équation

$$L_c \cdot y_i = 0.$$

On conclut en remarquant que $\tau(c)$ est la projectivisée de $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ via la projection $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$. \square

Longueur d'arc projective. Soit $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}P^{n-1})$ une courbe non paramétrée et non dégénérée dans l'espace projectif de dimension $n-1$ et notons x un paramètre quelconque sur cette courbe. Rappelons qu'à la courbe paramétrée $c(x)$ correspond un opérateur différentiel $L_c \in \mathcal{L}^n$.

Définition.

(i) On appelle *longueur d'arc projective* sur c la 1-forme:

$$d\sigma = [w_3(x)]^{1/3} dx$$

où $w_3(x) = (u_{n-3} - (n-1)^{-1}u'_{n-2})(x)(dx)^3$ est la différentielle cubique associée à l'opérateur L_c .

(ii) Supposons que $w_3 \neq 0$. Dans ce cas, σ définit un paramètre local sur la courbe c appelé *paramètre projectif*. Ces points sont caractérisés par le fait que la cône osculatrice possède un ordre de contact (en ce point) < 5 (voir [Ca]).

Courbure projective. La différentielle quadratique $u_{n-2}(x)(dx)^2$ définit une structure projective sur la courbe c . Plus précisément, il existe une projection $\text{Diff}(\mathbb{R})$ -équivariante de l'espace \mathcal{L}^n sur l'espace \mathcal{L}^2 des opérateurs de Sturm-Liouville:

$$\mu : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}^2 : L \mapsto \frac{1}{6}n(n-1)(n+1) \cdot \partial^2 + u_{n-2}(x). \quad (6)$$

Définition. On appelle *courbure projective* d'une courbe $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}P^{n-1})$ la structure projective sur c définie par l'application μ .

Exemple ($n=3$). Au voisinage d'un point non sextactique, une courbe $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}P^2)$ est uniquement définie (modulo $PGL(3; \mathbb{R})$) par sa courbure projective (cf. [Ca] et Chap. 4).

Le théorème des six sommets. Les deux résultats classiques suivants pour les courbes planes fermées sont des analogues du théorème des quatre sommets de la géométrie différentielle euclidienne plane.

Lemme 2.9. *Toute courbe fermée et non dégénérée dans $\mathbb{R}P^2$ possède au moins 6 points sextactiques.*

Preuve. (Voir par exemple [Bo] ou [Bu].) Ce résultat découle facilement du fait suivant: fixons un paramètre quelconque x sur notre courbe $c \in \mathcal{C}_{\text{id}}(\mathbb{R}P^2)$ et notons L l'opérateur différentiel de degré 3 associé à la courbe paramétrée $c(x)$. Pour toute solution y de l'équation différentielle $Ly = 0$, on a:

$$\int_{S^1} w_3(x) y(x)^2 dx = 0. \quad \square$$

Convenons d'appeler *sommet* d'une courbe affine de \mathbb{R}^2 tout point critique pour sa courbure. On a alors le:

Corollaire 2.10. *Une courbe affine fermée et non dégénérée dans \mathbb{R}^2 possède au moins 6 sommets.*

Preuve. Soit $c \in \mathcal{C}_{\text{id}}(\mathbb{R}^2)$ et munissons cette courbe de son paramètre affine σ .

Ses coordonnées $c_1(\sigma)$ et $c_2(\sigma)$ vérifient alors l'équation:

$$c_i'''(\sigma) + \kappa(\sigma)c_i'(\sigma) = 0.$$

A l'opérateur différentiel $\partial^3 + \kappa(\sigma)\partial$ correspond une classe de courbes fermées et non dégénérées $\bar{\gamma} \in \bar{T}_{\text{id}}(\mathbb{R}P^2)$. D'après le lemme précédent, chacune de ces courbes possède au moins 6 points sextactiques et, par conséquent, la différentielle cubique $w_3(\sigma) = -\frac{1}{2}\kappa'(\sigma)$ s'annule au moins en 6 points. \square

Cas des courbes planes équivariantes.

Lemme 2.11. *Si l'opérateur de monodromie T d'une courbe équivariante $c \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}P^2)$ possède une de ses valeurs propres égale à l'unité, alors la courbe c a au moins 2 points sextactiques.*

Corollaire 2.12. *Une courbe affine équivariante $c \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$ possède au moins 2 sommets.*

Les preuves de ces deux résultats sont analogues à celle du Lemme 2.9.

2.8. L'espace $\mathcal{P}_T(S^1)$ comme variété symplectique

L'espace $\mathcal{P}(S^1)$ formé par toutes les structures projectives sur le cercle unité S^1 est munie d'une structure de Poisson [Ki1].

Sur chaque sous-espace $\mathcal{P}_T(S^1)$ constitué des structures projectives à monodromie T fixée, ce crochet de Poisson est sous-jacent à une structure symplectique sur $\mathcal{P}_T(S^1)$: $\mathcal{P}_T(S^1)$ est une "feuille symplectique" de ce crochet (voir [Se1]).

Nous présentons ici la formule explicite pour la forme symplectique de l'espace $\mathcal{P}_T(S^1)$. La définition du crochet de Poisson sera donnée (dans le cas le plus général) au Chap. 7.

Lemme 2.13. Soit $\alpha \in \mathcal{P}_T(S^1)$, on a alors:

$$T_\alpha \mathcal{P}_T(S^1) \cong \text{Vect}(S^1) / \text{aut}(\alpha)$$

où $\text{Vect}(S^1)$ désigne l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de classe C^∞ sur le cercle et $\text{aut}(\alpha) \hookrightarrow \text{Vect}(S^1)$ est l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de la structure projective α .

Preuve. L'espace $\mathcal{P}_T(S^1)$ est un espace homogène du groupe $\text{Diff}^+(S^1)$, ce dernier agissant par transport de structure sur $\mathcal{P}(S^1)$. \square

Fixons une fois pour toutes une forme longueur dt sur la droite projective $\mathbb{R}P^1$. La donnée d'une application développante $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ pour une structure $\alpha \in \mathcal{P}_T(S^1)$ est équivalente à la donnée de la 1-forme $\theta = \varphi^*(dt)$. Si $\delta\alpha$ désigne un vecteur tangent à $\mathcal{P}_T(S^1)$ en α , il existe un champ $v \in \text{Vect}(S^1)$ tel que: $\delta\alpha = L_v\theta$ (où L_v désigne la dérivée de Lie par rapport au champ v). On peut en outre choisir ce champ de façon à ce qu'il s'annule en un point.

Définition de la forme symplectique. On définit une 2-forme symplectique ω sur la variété $\mathcal{P}_T(S^1)$ de la façon suivante. Soit $\delta_1\alpha$ et $\delta_2\alpha \in T_\alpha \mathcal{P}_T(S^1)$ deux vecteurs tangents en la structure $\alpha \in \mathcal{P}_T(S^1)$. Soit ξ_1 et $\xi_2 \in \text{Vect}(S^1)$ deux champs sur S^1 tels que: $\delta_1\alpha = L_{\xi_1}\theta$ et $\xi_i(x_0) = 0$ pour un point $x_0 \in S^1$, fixé.

On pose alors:

$$\omega(\delta_1\alpha, \delta_2\alpha) = \int_{S^1} \frac{L_{\xi_1}\theta}{\theta} d \frac{L_{\xi_2}\theta}{\theta}. \quad (7)$$

Remarquons que $L_{\xi_i}\theta$ est une 1-forme sur \mathbb{R} , mais que la fonction $L_{\xi_i}\theta/\theta$ est 2π -périodique, donc définie sur S^1 .

Lemme 2.14. La 2-forme ω est bien définie sur $\mathcal{P}_T(S^1)$; elle est fermée, non dégénérée et sa définition est indépendante du choix de ξ_1, ξ_2, φ et du paramètre t .

Preuve. En utilisant le paramètre t , on a les écritures suivantes pour la 1-forme θ et les champs ξ_i :

$$\theta = \varphi'(t) dt, \quad \xi_i = \xi_i(t) \frac{d}{dt}, \quad \xi_i(t + 2\pi) = \xi_i(t).$$

Un calcul direct nous donne accès à la formule suivante:

$$\omega(\delta_1\alpha, \delta_2\alpha) = \int_{S^1} S(\varphi)(t) [\xi_1, \xi_2](t) dt + \int_{S^1} \xi_1'(t) \xi_2''(t) dt$$

où $S(\varphi)$ est la dérivée de Schwarz (classique) et $[\xi_1, \xi_2] = \xi_1 \xi_2' - \xi_1' \xi_2$ désigne le crochet de Lie des champs de vecteurs sur S^1 .

L'invariance de la formule (7) vis-à-vis du choix de ξ_1, ξ_2, φ et dt peut être vérifiée soit directement, soit plus rapidement en utilisant la:

Remarque (Voir aussi Prop. 2.17). La formule (7) coïncide avec la forme symplectique de Kirillov–Kostant–Souriau sur une orbite coadjointe de l'algèbre de Virasoro (voir [Kil]). □

Lemme 2.15. *La forme ω est invariante relativement à l'action du groupe $\text{Diff}^+(S^1)$ sur l'espace $\mathcal{P}_T(S^1)$.*

Algèbre de Virasoro: crochet de Poisson sur l'espace $\mathcal{P}(S^1)$. Considérons l'action du groupe $\text{Diff}^+(S^1)$ sur l'espace $\mathcal{L}_{2\pi}^2$ des opérateurs de Hill $\partial^2 + u(x)$ (cf. 2.6). L'action infinitésimale associée est une action de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(S^1)$ sur $\mathcal{L}_{2\pi}^2$:

$$L_f u = f u' + 2 f' u + \frac{1}{2} f'''$$

où $f = f(x) dx \in \text{Vect}(S^1)$ et L_f désigne la dérivée de Lie.

Définition. Soit

$$\ell_f : \mathcal{L}_{2\pi}^2 \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \int_{S^1} f(x) u(x) dx$$

une fonctionnelle linéaire sur l'espace des opérateurs de Hill. On lui associe un champ de vecteurs ξ sur $\mathcal{L}_{2\pi}^2$ en posant:

$$\xi = L_f.$$

Lemme 2.16. *L'application $\xi : (\mathcal{L}_{2\pi}^2)^* \rightarrow \mathcal{L}_{2\pi}^2$ est un opérateur hamiltonien sur $\mathcal{L}_{2\pi}^2$: il définit un crochet de Poisson sur $\mathcal{P}(S^1)$.*

Preuve. En général, pour définir un crochet de Poisson sur une variété V , on commence par se donner un opérateur $\xi : T^*V \rightarrow TV$ linéaire et antisymétrique. Si f et $g \in C^\infty(V)$, on pose:

$$\{f, g\} := \langle dg, \xi(df) \rangle \in C^\infty(V).$$

$\{ \cdot, \cdot \}$ définit un crochet de Poisson sur V si:

$$\sum_{\text{cycl.}} \{f, \{g, h\}\} = 0 \quad \forall f, g, h \in C^\infty(V);$$

c'est l'identité de Jacobi.

Pour vérifier l'identité de Jacobi dans notre cas, il suffit de la vérifier sur les fonctionnelles ℓ_f . Posons donc:

$$\{\ell_f, \ell_g\}(u) = \langle \ell_g, L_g(u) \rangle = \int_{S^1} g(f u' + 2 f' u + \frac{1}{2} f''') (x) dx$$

où $f, g \in \text{Vect}(S^1)$ et $\partial^2 + u(x) \in \mathcal{L}_{2\pi}^2$.

On s'aperçoit alors que ces fonctionnelles linéaires définissent une algèbre de Lie:

$$\{\ell_f, \ell_g\}(u) = \ell_{[f,g]}(u) + \int_{S^1} f'(x)g''(x)dx. \quad (8)$$

□

Remarque. L'algèbre de Lie définie par (8) s'appelle l'*algèbre de Virasoro*. C'est une extension centrale de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(S^1)$.

Le fait suivant peut être démontré en utilisant la formule (8):

Proposition 2.17. *Une orbite coadjointe de l'algèbre de Virasoro s'identifie à une composante connexe d'un espace $\mathcal{P}_T(S^1)$. La forme symplectique sur ce dernier espace coïncide alors avec la 2-forme symplectique canonique sur l'orbite coadjointe.*

3. Structures symplectiques sur l'espace des courbes affines

Soit M une variété localement affine (cf. Chap. 2.1) de dimension n . Nous définissons ici une forme symplectique sur l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{\text{id}}(M)$ des courbes fermées, non dégénérées et non paramétrées sur M à équivalence affine près.

Notre définition repose sur deux idées principales:

(a) A chaque courbe $c \in \mathcal{C}(M)$ est associée une classe dans $\overline{\Gamma}(\mathbb{R}P^{n-1})$ (l'espace des courbes *paramétrées* et non dégénérées sur $\mathbb{R}P^{n-1}$ modulo équivalence projective). Nous définissons alors une application:

$$\Pi : \mathcal{C}_{\text{id}}(M) \longrightarrow \overline{\Gamma}(\mathbb{R}P^{n-1})$$

dans l'espace des courbes projectives paramétrées (modulo équivalence projective). Cette application est affinement invariante et induit une application:

$$\overline{\Pi} : \overline{\mathcal{C}}_{\text{id}}(M) \longrightarrow \overline{\Gamma}(\mathbb{R}P^{n-1}).$$

Sur chaque composante connexe de l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{\text{id}}(M)$, l'image de $\overline{\Pi}$ est incluse dans le sous-espace des courbes projectives à *monodromie fixée*.

(b) Il existe une structure symplectique canonique sur chaque espace $\overline{\Gamma}_T(\mathbb{R}P^{n-1})$ (dans le cas où $n = 2$, cette structure a été définie dans le Chap. 2.8; pour le cas où $n \geq 3$ voir Chap. 6.2).

3.1. Cas où $\dim(M) = 2$.

Plaçons-nous à présent dans le cas d'une *surface* localement affine M .

Si $c \in \mathcal{C}(M)$, nous pouvons définir deux structures géométriques sur c (cf. Chap. 2.7):

(i) Une paramétrisation affine:

$$\sigma : \mathbb{R} \rightarrow c.$$

(ii) Son application de Gauss:

$$\tau : c \rightarrow \mathbb{R}P^1.$$

La première est une structure *affine* sur c et la seconde une structure *projective*.

Définition de l'application $\Pi : \mathcal{C}_{\text{id}}(M) \rightarrow \mathcal{P}(S^1)$. On peut interpréter σ et τ comme deux structures projectives sur la courbe fermée $c \approx S^1$ (pas de manière canonique). L'espace $\mathcal{P}(S^1)$ est un espace affine modelé sur l'espace vectoriel des opérateurs de Hill (voir Chap. 2.5). Fixons alors une structure projective $\alpha \in \mathcal{P}(S^1)$ qui jouera le rôle de "l'origine" (on pourra prendre par exemple la structure projective canonique définie par le revêtement universel de $\mathbb{R}P^1$).

$\Pi(c)$ est alors définie par l'égalité:

$$\tau - \sigma = \Pi(c) - \alpha \in \mathcal{L}_{2\pi}^2.$$

Nous pouvons également donner une version plus naïve, quoique directe, de cette définition: on obtient une immersion $\pi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ en posant:

$$\pi_c := \tau \circ \sigma.$$

Cette immersion π_c est l'application développante d'une unique structure projective sur S^1 . Nous appellerons $\pi(c)$ cette dernière.

Lemme 3.1. *L'application Π "descend" sur l'espace quotient $\bar{\mathcal{C}}_{\text{id}}(M)$.*

Preuve. Π est – par construction – affinement invariante. □

On obtient donc une application $\bar{\Pi} : \bar{\mathcal{C}}_{\text{id}}(M) \rightarrow \mathcal{P}(S^1)$.

Lemme 3.2. *$\bar{\Pi}$ envoie chaque composante connexe de $\bar{\mathcal{C}}_{\text{id}}(M)$ dans un sous-espace $\mathcal{P}_T(S^1)$.*

Preuve. Faisons le choix d'une paire développante (φ, T) pour la structure affine de la surface M :

$$\begin{cases} \varphi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T : \pi_1(M) \rightarrow \text{Aff}(2; \mathbb{R}) \end{cases}$$

Soit $c \in \mathcal{C}_{\text{id}}(M)$ une courbe fermée sur la surface M et $\tilde{c} \subset \tilde{M}$ un relevé quelconque de cette courbe dans le revêtement universel de la surface. La classe d'homotopie

$[c]$ de notre courbe peut être considérée comme un élément de $\pi_1(M)$. Posons donc $A := T([c]) \in \text{Aff}(2; \mathbb{R})$. La courbe $\varphi(\tilde{c}) \subset \mathbb{R}^2$ est A -équivariante:

$$\varphi(\tilde{c}) \in \mathcal{C}_A(\mathbb{R}^2).$$

Notons $T \in \text{PGL}(2; \mathbb{R})$ l'image de A par la projection naturelle:

$$\text{Aff}(2; \mathbb{R}) \rightarrow \text{PGL}(2; \mathbb{R}).$$

Munissons c de son paramètre affine σ et soit $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ l'application de Gauss associée à la courbe $(\varphi \circ \tilde{c})(\sigma)$. On obtient:

$$\begin{cases} \beta(\sigma + 2\pi) = T \cdot \beta(\sigma) \\ \beta \text{ est une application développante pour la structure } \Pi(c) \end{cases}$$

De plus, si c reste dans la même classe d'homotopie, A et, par conséquent, T restent fixes. \square

Proposition 3.3. *Sur chaque composante connexe C de l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{\text{id}}(M)$, la restriction $\overline{\Pi}: C \rightarrow \mathcal{P}_T(S^1)$ est une bijection.*

Preuve. L'opérateur de Hill $L = \tau - \sigma$ associé à la structure projective $\Pi(c)$ ($c \in \mathcal{C}_{\text{id}}(M)$) est donné par:

$$L = \partial_\sigma^2 + \kappa(\sigma)$$

où $\kappa(\sigma)$ désigne la courbure affine de la courbe c (voir Chap. 2.7).

Or, une courbe affine est définie uniquement par sa courbure, modulo équivalence affine. \square

Corollaire 3.4. *Il existe sur chaque composante connexe de l'espace $\overline{\mathcal{C}}_{\text{id}}(M)$ une structure de variété symplectique. La forme symplectique Ω est donnée par la formule:*

$$\Omega = \overline{\Pi}^*(\omega),$$

ω désignant la forme symplectique sur l'espace $\mathcal{P}_T(S^1)$.

3.2. Cas où $\dim M = n \geq 3$ – Fin de la démonstration du Théorème 1.1

M désignera une variété affine de dimension $n \geq 3$.

Nous généralisons dans cette section la construction vue en 3.1. l'Existence d'une paramétrisation affine pour une courbe $c \in \mathcal{C}_{\text{id}}(M)$ conduit à l'existence d'un plongement:

$$\mathcal{C}_{\text{id}}(M) \hookrightarrow \Gamma(M).$$

De plus, le choix d'une application développante $\varphi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ entraîne l'existence d'une application:

$$\Gamma(M) \rightarrow \Gamma(\mathbb{R}P^{n-1})$$

(application de Gauss associée à une courbe paramétrée). Nous obtenons donc une application:

$$\Pi : C_{\text{id}}(M) \rightarrow \Gamma(\mathbb{R}P^{n-1}).$$

Soit à présent $p : \text{Aff}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{PGL}(n; \mathbb{R})$ la projection naturelle. On a le

Lemme 3.5. Soit $A \in \text{Aff}(n; \mathbb{R})$ et $T := p(A)$, on a:

$$\Pi(C_A(\mathbb{R}^n)) \subset \Gamma_T(\mathbb{R}P^{n-1}).$$

La démonstration est analogue à celle du Lemme 3.2.

Les autres étapes qui suivent ce lemme répètent le cas de la dimension 2. Nous obtenons finalement l'application:

$$\bar{\Pi} : \bar{C}_{\text{id}}(M) \rightarrow \bar{\Gamma}(\mathbb{R}P^{n-1}).$$

Sur chaque composante connexe de l'espace $\bar{C}_{\text{id}}(M)$, $\bar{\Pi}$ est une bijection sur un sous-espace $\bar{\Gamma}_T(\mathbb{R}P^{n-1})$.

$\bar{\Gamma}_T(\mathbb{R}P^{n-1})$ est muni d'une structure de variété symplectique (voir Chap. 6.2).

Nous définissons donc sur $\bar{C}_{\text{id}}(M)$ une forme symplectique, image réciproque par $\bar{\Pi}$ de celle sur $\bar{\Gamma}_T(\mathbb{R}P^{n-1})$. Le Théorème 1.1 est démontré. \square

Remarque concernant l'action du groupe $\text{Diff}^+(S^1)$. Le groupe $\text{Diff}^+(S^1)$ agit sur l'espace $\bar{\Gamma}_T(\mathbb{R}P^{n-1})$ par reparamétrisation des courbes. L'isomorphisme $\bar{\Pi}$ nous permet de transporter cette action sur chaque composante connexe de l'espace $\bar{C}_{\text{id}}(M)$. Par exemple, dans le cas de la dimension 2, le groupe $\text{Diff}^+(S^1)$ agit sur la courbure $\kappa(\sigma)$ d'une courbe $c \in C_{\text{id}}(M)$ comme sur le potentiel de l'opérateur de Hill $\partial_\sigma^2 + \kappa(\sigma)$.

4. Structure de Poisson sur l'espace des courbes de Cartan

Nous considérons dans ce chapitre l'espace $C_0(\mathbb{R}P^2)$ des courbes projectives équivariantes, non paramétrées et non dégénérées dans le plan projectif.

La même idée qui nous avait conduits à la construction d'une structure symplectique sur l'espace des courbes affines, nous amène, dans le cas projectif, à la construction d'une structure de Poisson. De la même manière que dans le Chap. 3, nous allons associer à toute courbe $c \in C_0(\mathbb{R}P^2)$ deux structures géométriques sur cette courbe:

- (a) Une structure *affine*, engendrée par la largeur d'arc projective sur c .
- (b) Une structure *projective*, engendrée par la courbure projective de c .

Afin que la structure (a) puisse exister, il s'avèrera nécessaire de renforcer la notion de non-dégénérescence. Précisons tout de suite ce fait.

4.1. Notion de courbe de Cartan

Définition. Une courbe $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}P^2)$ sera dite une *courbe de Cartan* si elle ne comporte aucun point sextactique.

Remarque. Il est possible de donner une version plus topologique de cette définition: une courbe de Cartan est en position générale, au voisinage de chacun de ses points, par rapport à sa tangente, mais aussi par rapport à sa *cônique osculatrice*.

Nous noterons $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}P^2)$ (resp. $\Gamma_c(\mathbb{R}P^2)$) dans le cas des courbes paramétrées) l'espace de toutes les courbes de Cartan *équivariantes*. On notera également $\bar{\mathcal{C}}_c(\mathbb{R}P^2)$ (resp. $\bar{\Gamma}_c(\mathbb{R}P^2)$) ces mêmes espaces modulo équivalence projective.

Comme conséquence du Lemme 2.11, nous obtenons: l'opérateur de monodromie d'une courbe de Cartan équivariante ne possède aucune valeur propre égale à l'unité.

4.2. Le crochet de poisson – Démonstration du Théorème 1.2

Les deux structures (a) et (b) sur une courbe de Cartan $c \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}P^2)$ permettent de définir une application:

$$\Pi : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \mathcal{P}(S^1).$$

(Nous utilisons le fait que $\mathcal{P}(S^1)$ est un espace affine; cf. 2.5). Cette application est $PGL(3; \mathbb{R})$ -invariante; elle descend sur l'espace $\bar{\mathcal{C}}_c(\mathbb{R}P^2)$. On obtient l'application:

$$\bar{\Pi} : \bar{\mathcal{C}}_c(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \mathcal{P}(S^1).$$

La longueur et la courbure projective sont des invariants différentiels projectifs: une courbe de $\mathbb{R}P^2$ est uniquement définie – modulo $PGL(3; \mathbb{R})$ – par sa courbure $\kappa(\sigma)$ (où σ est le paramètre projectif de la courbe). Cette remarque montre que $\bar{\Pi}$ est injective.

L'espace $\bar{\mathcal{C}}_c(\mathbb{R}P^2)$ peut alors être muni d'une structure de Poisson induite, via le plongement $\bar{\Pi}$, par le crochet de Poisson sur $\mathcal{P}(S^1)$ (cf. 2.16). Le Théorème 1.2 est démontré. \square

Les feuilles symplectiques de la variété de Poisson $\bar{\mathcal{C}}_c(\mathbb{R}P^2)$ sont constituées des courbes \bar{c} vérifiant:

$$T(\bar{\Pi}(\bar{c})) = C^{lc}.$$

Remarque. La définition de ce crochet de Poisson peut en fait se généraliser au cas d'une surface localement projective quelconque.

5. Feuilletage symplectique

Il existe sur l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}P^2)$ un feuilletage dont chaque feuille est munie d'une structure symplectique. Presque toute feuille est de codimension finie.

Définition. Rappelons qu'une courbe projective fermée $c \in \mathcal{C}_{\text{id}}(\mathbb{R}P^2)$ possède au moins 6 points sextactiques (cf. Lemme 2.9). Une courbe $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}P^2)$ possédant un nombre fini de tels points sera dite *générique*.

Soit $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}P^2)$ une courbe générique et $\{x_1, \dots, x_{2k}\}$ l'ensemble de ses points sextactiques (c'est-à-dire $\{x_1, \dots, x_{2k}\}$ est l'ensemble des zéros de la différentielle cubique w_3 sur c). On associe alors à c un point $t = t(c) \in \mathbb{R}P^{2k-1}$ de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} t \text{ est la droite vectorielle de } \mathbb{R}^{2k} \text{ de vecteur directeur } \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{2k} \end{bmatrix} \\ t_i := \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_3(x)^{1/3} dx \quad \forall i \in \{1, \dots, 2k\} \end{array} \right.$$

Soit T une classe de conjugaison dans $PGL(2; \mathbb{R})$. Notons $\mathcal{M}_{T,t}$ le sous-espace de $\mathcal{C}(\mathbb{R}P^2)$ constitué des courbes c vérifiant:

$$t(c) = t \quad \text{et} \quad T(\kappa_c) = T.$$

(κ_c est la courbure projective sur c , considérée comme structure projective.)

On pose aussi $\overline{\mathcal{M}}_{T,t} := \mathcal{M}_{T,t} / PGL(3; \mathbb{R})$.

Proposition 5.1. *Il existe sur $\overline{\mathcal{M}}_{T,t}$ une structure symplectique.*

Preuve. Commençons par définir une application:

$$\overline{\Pi} : \overline{\mathcal{M}}_{T,t} \rightarrow \mathcal{P}_T(S^1). \tag{9}$$

Sur toute courbe $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}P^2)$, il existe une structure projective: celle déterminée par la courbure projective de la courbe c . La longueur d'arc projective sur c ne définit pas, par contre, une structure affine sur c si la différentielle cubique w_3 a des zéros.

Soit c et $c' \in \mathcal{M}_{T,t}$ deux courbes, w_3 et w'_3 les différentielles cubiques associées respectivement à c et à c' . On peut alors identifier ces deux courbes.

Plus précisément, on peut trouver un difféomorphisme $g : c \rightarrow c'$ tel que:

$$g^*(w'_3) = C^{\text{te}} \times w_3.$$

Ce difféomorphisme est évidemment projectivement invariant.

Fixons une courbe $c' \in \mathcal{M}_{T,t}$ et une structure projective quelconque σ' sur c' . Toute courbe $c \in \mathcal{M}_{T,t}$ est alors munie d'une structure projective, image réciproque par le difféomorphisme g de la structure σ' . Nous disposons donc de deux structures projectives sur c , ce qui permet de définir une application:

$$\Pi : \mathcal{M}_{T,t} \rightarrow \mathcal{P}_T(S^1).$$

Π étant invariante sous l'action de $PGL(3; \mathbb{R})$, elle descend sur $\overline{\mathcal{M}}_{T,t}$ et l'application (9) est bien définie. \square

Notons alors $\Omega := \overline{\Pi}^* \omega$ où w est la forme symplectique sur $\mathcal{P}_T(S^1)$ (cf. 2.7). Nous terminerons la démonstration par le:

Lemme 5.2.

- (i) $\overline{\Pi}$ est bijective;
- (ii) Ω est indépendante du choix de c' et σ' .

Preuve du lemme. Les deux applications $\overline{\Pi}$ correspondantes à deux choix distincts pour c' et σ' diffèrent par une translation sur l'espace $\mathcal{P}_T(S^1)$. Or, la 2-forme ω est invariante relativement aux translations (cf. 2.8). \square

Remarque. Sur l'espace $\overline{\mathcal{C}}_c(\mathbb{R}P^2)$ des courbes de Cartan, la structure symplectique Ω coïncide avec la structure symplectique définie sur les feuilles symplectiques (cf. 4.2).

6. Crochet de Gel'fand–Dikii

Le crochet de Poisson de Gel'fand–Dikii (voir [G-D,D-S]) est une des plus intéressantes structures de Poisson en dimension infinie. Les travaux s'y rattachant sont surtout populaires en Physique Théorique.

L'algèbre de Poisson engendrée par ce crochet joue le rôle de l'algèbre des symétries (voir par exemple [I-Z-F]).

Du point de vue géométrique, l'intérêt du crochet de Gel'fand–Dikii est basé sur ses propriétés naturelles d'invariance. Il nous permettra de définir une structure symplectique $\text{Diff}^+(S^1)$ -invariante sur l'espace des courbes paramétrées de $\mathbb{R}P^{n-1}$ modulo équivalence projective.

6.1. Définition du crochet de Gel'fand–Dikii

Le crochet de Gel'fand–Dikii est défini sur l'espace des opérateurs différentiels linéaires à coefficients périodiques. Considérons donc l'espace des opérateurs différentiels linéaires $L = \partial^n + u_{n-2}(x)\partial^{n-2} + \dots + u_0(x)$ dont tous les coefficients u_i sont 2π -périodiques et notons le \mathcal{L}_0 .

Nous allons associer à chaque fonctionnelle linéaire $F : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ un champ de vecteurs $\xi(F)$ sur \mathcal{L}_0 . Pour cette construction, nous avons besoin de quelques résultats concernant l'espace \mathcal{L}_0 .

Tout d'abord, il suffira de se limiter aux fonctionnelles linéaires régulières sur \mathcal{L}_0 , c'est-à-dire aux fonctionnelles F de la forme:

$$F(L) = \sum_{i=0}^{n-2} \int_{S^1} f_i(x) u_i(x) dx$$

où $f_i \in C^\infty(S^1)$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$.

Définition. La somme formelle:

$$S = \sum_{i=1}^n a_i(x) \partial^{-i}$$

où les $a_i \in C^\infty(S^1)$, $\partial^{-1} = (d/dx)^{-1}$ est appelée un *symbole pseudo-différentiel* d'ordre n .

A chaque symbole S , nous associons une fonctionnelle linéaire

$$\ell_S : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

par la construction suivante. Si $L \in \mathcal{L}_0$, le produit $S \cdot L$ peut se réécrire comme une série formelle:

$$S \cdot L = \sum_{i=n-1}^{-\infty} b_i(x) \partial^i.$$

Il suffit d'utiliser l'*identité de Leibnitz*:

$$\partial^{-1} a(x) = a(x) \partial^{-1} - a'(x) \partial^{-2} + a''(x) \partial^{-3} - \dots$$

(Cette identité se déduit de l'égalité: $\partial \cdot \partial^{-1} a(x) \equiv a(x)$.)

Définissons alors:

$$\ell_S(L) := \int_{S^1} \text{rés}(S \cdot L)(x) dx$$

où $\text{rés}(S \cdot L) := b_{-1}$. Le fait suivant est alors évident:

Lemme 6.1. *Toute fonctionnelle linéaire régulière F peut s'écrire:*

$$F = \ell_S$$

où S est un *symbole pseudo-différentiel*.

Remarque importante. Il est évident que la fonctionnelle ℓ_S ne dépend pas du dernier coefficient a_n du symbole S . Par exemple, dans le cas $n = 2$, le symbole $S = a_1 \partial^{-1} + a_2 \partial^{-2}$ admet pour fonctionnelle associée:

$$\ell_S(\partial^2 + u) = \int_{S^1} a_1(x)u(x)dx.$$

Définition de l'opérateur hamiltonien. A chaque symbole S , on associe un opérateur linéaire $\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0$

$$L \longmapsto L_S = L(SL)_+ - (LS)_+L$$

(où le signe + signifie que l'on considère uniquement la partie différentielle de l'expression, c'est-à-dire tous les degrés ≥ 0).

A priori L_S est un opérateur différentiel d'ordre $2n - 1$, mais il est facile de voir que les coefficients des opérateurs ∂^i sont identiquement nuls lorsque $i > n - 1$.

Proposition 6.2 ([D-S]). *A toute fonctionnelle linéaire ℓ correspond un unique symbole S tel que:*

- (i) $\ell = \ell_S$,
- (ii) $\text{ord}(L_S) = n - 2$.

Preuve. Le choix du coefficient a_n symbole S est fixé par la seconde condition. □

Exemple ($n = 2$). Si

$$\ell(\partial^2 + u) = \int_{S^1} f(x)u(x)dx,$$

alors $\ell = \ell_S$ avec $S = u(x)\partial^{-1} - \frac{1}{2}u'(x)\partial^{-2}$. L'opérateur L_S peut être interprété dans ce cas comme un vecteur tangent à l'espace \mathcal{L}_0 .

Théorème 6.3 ([G-D,D-S]). *L'application $\xi : \mathcal{L}_0^* \rightarrow \mathcal{L}_0$ définie par:*

$$\xi(\ell) = L_S$$

(où S vérifie les 2 conditions de la proposition précédente) définit un crochet de Poisson sur l'espace \mathcal{L}_0 , c'est-à-dire une structure d'algèbre de Lie sur l'espace des polynômes différentiels.

Définition. Le crochet de Poisson du théorème ci-dessus est appelé crochet de Gel'fand-Dikii.

L'expression de ce crochet sur les fonctionnelles linéaires est donnée par la formule suivante:

$$\{\ell_S, \ell_T\} := \ell_T(L_S).$$

Remarques. (i) $n \geq 3$. Dans ce cas, le crochet de deux fonctionnelles linéaires est une fonctionnelle quadratique.

(ii) $n = 2$. Les fonctionnelles linéaires forment une algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre de Virasoro.

(iii) D'un point de vue géométrique, le crochet de Gel'fand–Dikii apparaît comme très naturel si on remarque les deux propriétés suivantes:

(1) Il est invariant relativement à l'action de $\text{Diff}^+(S^1)$.

(2) La restriction de ce crochet aux fonctionnelles $F(u_{n-2})$ définit un crochet d'algèbre de Lie. Cette algèbre de Lie coïncide avec l'algèbre des fonctions sur les opérateurs de Hill:

$$L = \partial_x^2 + \frac{6}{n(n-1)(n+1)} u_{n-2}(x)$$

(voir [Kh]).

Considérons, de plus, l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(S^1)$ associée à l'action de $\text{Diff}^+(S^1)$. Cette action infinitésimale conserve le crochet de Gel'fand–Dikii. L'application moment correspondant à cette action est donnée par:

$$(\text{courbe dans } \mathbb{R}P^{n-1}) \longmapsto (\text{courbure projective associée}).$$

6.2. Structure symplectique sur l'espace des courbes projectives paramétrées

On étudie ici les feuilles symplectiques du crochet de Gel'fand–Dikii.

Le résultat principal dans [K-O] est le:

Théorème 6.4. *Le crochet de Gel'fand–Dikii définit une structure symplectique sur chaque sous-espace $\mathcal{L}_T \subset \mathcal{L}_0$ constitué par les opérateurs à monodromie⁴ fixée.*

En d'autres termes, chaque espace $\bar{F}_T(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathcal{L}_T$ (cf. 2.4) est une variété symplectique.

Preuve. Il nous faut démontrer deux faits:

(a) Un champ hamiltonien L_X est tangent à \mathcal{L}_T .

(b) Tout vecteur tangent à \mathcal{L}_T est donné par un champ hamiltonien.

La donnée d'un opérateur L est équivalente à celle de l'espace des solutions de l'équation différentielle associée $Ly = 0$. A un symbole S correspond un champ de vecteurs $L \longmapsto L_S$. Ce symbole induit également un champ sur chaque espace de solutions $E_L = \{y \in C^\infty(\mathbb{R}) | Ly = 0\}$:

$$y \longmapsto y_S.$$

Le résultat est:

⁴ Rappelons que T désigne en fait une classe de conjugaison dans le groupe projectif $PGL(n; \mathbb{R})$.

$$y_S = -(SL)_+ y. \tag{10}$$

En fait, par définition, on a l'identité suivante:

$$L_S(y) + L(y_S) = 0.$$

(a) est alors évident en considérant (10) car $y \mapsto y_S$ est linéaire en y .

Réciproquement, si on fixe y_S , le symbole S s'obtient comme solution d'un système d'équations linéaires. On vérifie facilement que les coefficients $a_i(x)$ de S sont 2π -périodiques si et seulement si la monodromie est fixée. \square

Exemple: ($n = 3$). L'espace $\overline{F}_{Id}(\mathbb{R}P^2)$ est constitué de 3 feuilles symplectiques. Chacune de ces feuilles correspond à une des 3 classes d'homotopie dessinées à la Fig. 1 (Chap. 2.3).

7. Formules explicites pour les formes symplectiques

Nous présentons dans ce chapitre la formule donnant la forme symplectique induite par le crochet de Gel'fand–Dikii dans un cas particulier.

Définition. Une courbe $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}P^{n-1})$ sera dite *non oscillante* si tout hyperplan projectif de $\mathbb{R}P^{n-1}$ rencontre la courbe en au plus $n - 1$ points distincts.

Si $\gamma(x)$ est une courbe paramétrée non oscillante $\in \Gamma(\mathbb{R}P^{n-1})$, alors l'opérateur différentiel associé L_γ (cf. 2.4) est non oscillant au sens classique. C'est-à-dire, chaque solution y de l'équation différentielle associée $L_\gamma \cdot y = 0$ admet au plus $n - 1$ zéros sur l'axe réel.

Le cas particulier pour lequel nous allons expliciter la forme symplectique de Gel'fand–Dikii est donc celui des courbes équivariantes, non oscillantes et à monodromie fixée.

Présentons tout d'abord deux résultats classiques de la théorie des équations différentielles linéaires, résultats qui nous seront utiles pour la suite:

Lemme 7.1 (Sturm). *Un opérateur $L \in \mathcal{L}^n$ est non-oscillant si et seulement si on peut trouver $n - 1$ solutions y_1, \dots, y_{n-1} pour l'équation $Ly = 0$ telles que les $n - 1$ fonctions:*

$$y_1, \quad w_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad w_{n-1} = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-2} & \dots & y_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

ne s'annulent en aucun point.

Lemme 7.2 (Frobenius). *Un opérateur $L \in \mathcal{L}^n$ est non-oscillant si et seulement si L possède une factorisation en n opérateurs d'ordre 1:*

$$L = (\partial + a_1 + \cdots + a_{n-1})(\partial - a_{n-1}) \cdots (\partial - a_1)$$

où les $a_i \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Les coefficients a_i ci-dessus peuvent être calculés en posant:

$$\begin{cases} a_1 = -y'_1/y_1 \\ a_i = -a_{i-1} - w'_i/w_i, \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases}$$

où y_1 et w_i sont les fonctions vues dans le Lemme 7.1.

Remarque. Supposons que les coefficients u_i dans l'opérateur L soient 2π -périodiques. On peut alors trouver une factorisation de L où les coefficients a_i sont également 2π -périodiques. En fait, il suffit que l'opérateur de monodromie T , associé à L , soit représenté par une matrice triangulaire dans la base $\{y_1, \dots, y_{n-1}, y\}$.

Soit γ une courbe paramétrée $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ non oscillante et équivariante. Notons $\delta\gamma$ et $\widehat{\delta}\gamma$ deux déformations infinitésimales de γ (en d'autres termes, deux vecteurs tangents en γ à l'espace des courbes non oscillantes). On peut identifier $\delta\gamma$ (resp. $\widehat{\delta}\gamma$) à $\delta a = (\delta a_1, \dots, \delta a_{n-1})$ (resp. à $\widehat{\delta} a = (\widehat{\delta} a_1, \dots, \widehat{\delta} a_{n-1})$).

Soit $A = (A_{ij})$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ définie par:

$$A_{ij} := \delta_{ij} - 1/n.$$

On a alors le:

Théorème 7.3. *La forme symplectique ω de Gel'fand–Dikii sur l'espace des courbes non oscillantes à monodromie fixée est donnée par:*

$$\omega(\delta\gamma, \widehat{\delta}\gamma) = \int_{S^1} (\delta a A \partial^{-1} \widehat{\delta} a)(x) dx.$$

Références

- [Bo] G. Bol, *Projektive Differentialgeometrie*, Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher (Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1950).
- [Br] J.L. Brylinski, *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, Progress in Math., Vol. 107 (Birkhäuser, 1992).
- [Bu] S. Buchin, *Affine Differential Geometry* (Gordon and Breach, New York, Science Press, Beijing, 1983).
- [Ca] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective* (Gauthier-Villars, Paris, 1937).
- [C-F] E. Čech and G. Fubini, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces* (Gauthier-Villars, Paris, 1931).
- [Ch] S. Chihi, Sur les feuilletages de codimension 1 transversalement homographiques, Thèse, publ. de l'IRMA, Strasbourg (1979).
- [D-S] V.G. Drinfel'd and V.V. Sokolov, Lie algebras and equations of Korteweg–De Vries type. J. Soviet Math. 30 (1985) 1975–2036.

- [F-I-Z] Ph. Di Francesco, C. Itzykson and J.B. Zuber, Classical W -algebras, Saclay SPhT 90/149, Princeton PUPT n.1211 (1990).
- [G-D] I.M. Gel'fand and L.A. Dikii, A family of hamiltonian structures connected with integrable nonlinear differential equations, in: *I.M. Gel'fand collected papers*, S.G. Gindikin et al., eds., Vol. 1 (Springer, 1987) pp. 625–646.
- [G-F] I.M. Gel'fand and D.B. Fuchs, The cohomologies of the Lie algebra of the vector fields in a circle, *Func. Anal. Appl.* 2:4 (1968) 342–343.
- [Gh] E. Ghys, Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsien, *Ann. de l'Inst. Fourier* 42:1,2 (1992) 209–247.
- [Go] W. Goldman, Geometric structures on manifolds and varieties of representations, *Contemporary Math.* 74 (1988) 169–198.
- [Gr] M. Green, The moving frame, differential invariants and rigidity theorems for curves in homogeneous spaces, *Duke Math. J.* 45:4 (1978) 735–779.
- [Ha] G. Halphen, Sur les invariants différentiels, Thèse, Paris (1878) in: *Oeuvres II*, pp. 197–257.
- [Hu] J. Hubbard, The monodromy of projective structures, in: *Riemann surfaces and related topics*, *Stony Brook, 1978*, eds. I. Kra and B. Maskit, *Annals of Math. Stud.* 97 (1981) pp. 257–275.
- [Ig] P. Iglesias, La trilogie du moment, preprint E.N.S. Lyon U.M.P.A. 82 (1992).
- [Iv] N.V. Ivanov, Projective structures, flat bundles and Kähler metrics on moduli spaces, *Math. USSR Sbornik* 61:1 (1988) 211–224.
- [K-O] B. Khesin and V. Yu. Ovsienko, Symplectic leaves of the Gel'fand–Dikii brackets and homotopy classes of nondegenerate curves, *Func. Anal. Appl.* 24:1 (1990).
- [K-S] B. Khesin and B. Shapiro, Non degenerate curves on S^2 and orbit classification of the Zamolodchikov algebra, *Comm. Math. Phys.* 145 (1992) 357–362.
- [Kh] T.G. Khovanova, Lie algebras of Gel'fand–Dikii and the Virasoro algebra, *Funk. Anal. Prilozhen.* 20:4 (1987) 89–90.
- [Ki 1] A.A. Kirillov, Infinite dimensional Lie groups: their orbits, invariants and representations. The geometry of moments, *Lect. Notes in Math.* 970 (Springer-Verlag, 1982) pp. 101–123.
- [Ki 2] A.A. Kirillov, Orbits of the group of diffeomorphisms of a circle and local Lie superalgebras, *Func. Anal. Appl.* 15:2 (1981) 135–137.
- [Ki-Y] A.A. Kirillov and D.V. Yuriev, Representations of the Virasoro algebra by the orbit method, *Journal of Geometry and Physics* 5:3 (1988) 351–363.
- [Ku] N.H. Kuiper, Locally projective spaces of dimension one, *Michigan Mathematical Journal* 2 (1954) 95–97.
- [L-P] V.F. Lazutkin and T.F. Pankratova, Normal forms and versal deformations for Hill's equations, *Func. Anal. Appl.* 9:4 (1975) 306–311.
- [Li 1] J.A. Little, Nondegenerate homotopies of curves on the unit 2-sphere, *J. Diff. Geom.* 4:3 (1970) 339–348.
- [Li 2] J.A. Little, Third order nondegenerate homotopies of the space curves, *J. Diff. Geom.* 5 (1971) 503–515.
- [O] V.Yu. Ovsienko, Classification of third-order linear differential equations and symplectic sheets of the Gel'fand–Dikii bracket, *Math. Notes* 47:5,6 (1990) 465–470.
- [Se 1] G.B. Segal, Unitary representations of some infinite dimensional groups, *Comm. Math. Phys.* 80:3 (1981) 301–342.
- [Se 2] G.B. Segal, The geometry of the KdV equation, in: *Trieste Conference on Topological Methods in Quantum Field Theories*, eds. W. Nahm et al. (World Scientific, 1990) pp. 96–106.
- [Sh] M.Z. Shapiro, Topology of the space of nondegenerate closed curves, *Mat. Sbornik*, à paraître.
- [S-T] D. Sullivan and W. Thurston, Manifolds with canonical coordinate charts: some examples, *L'Enseign. Math.* 29 (1983) 15–25.
- [Wh] H. Whitney, On regular closed curves in the plane, *Compositio Math.* 4 (1937) 276–284.
- [Wi] E.J. Wilczynski, *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces* (Teubner, Leipzig, 1906).
- [Ws] G. Wilson, On the Adler–Gel'fand–Dikii bracket, in: *Proc. of the CRM workshop on Hamiltonian Systems*, J. Harnad and J.E. Marsden, eds., Publ. CRM (1990) pp. 77–85.
- [Wu] T. Wurzbacher, Symplectic geometry of the loop space of a riemannian manifold, SFB 237 preprint, Ruhr Universität Bochum (1993).